

GLI UNIVERSI IPERSFERICI MULTITEMPORALI,  
LA COSMOLOGIA E LE TEORIE UNITARIE (\*)

di

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 — TEORIE MAXWELLIANE OD EINSTEINIANE?

Si celebra quest'anno il Centenario della nascita di Maxwell (1831-1879), al quale si devono le famose equazioni del campo elettromagnetico. Ricorre pure il Centenario della nascita di EINSTEIN (1879-1955) che con la sua «relatività ristretta» rese possibile una rigorosa sistemazione logica della teoria di Maxwell. Infatti, le equazioni elettromagnetiche non risultano invarianti per il gruppo di Galilei, su cui si basa la fisica classica, ma per il gruppo di Poincaré. Nasce così un profondo legame tra la struttura geometrica del cronotopo di Minkowski, il gruppo dei suoi movimenti in sé, e le leggi del campo elettromagnetico  $F_{ik}$ . Esse infatti, scritte in forma 4-dimensionale, assumono un aspetto assai semplice

$$(1,1) \quad \text{Div } F_{ik} = J_k \quad ; \quad \text{Rot } F_{ik} = 0$$

dove  $J_k$  è la densità di corrente-carica elettrica.

Il problema di costruire una teoria delle gravitazione, compatibile con i principi della relatività, portò Einstein all'idea che era necessario passare dai movimenti inerziali a quelli non inerziali. In conseguenza, il campo gravitazionale veniva assimilato alla «curvatura» dello spazio-tempo, e con la «relatività generale» (1915) veniva abbandonata la struttura gruppale della fisica, che si era rivelata così feconda. Le equazioni gravitazionali di Einstein

---

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività GNFM del C.N.R.

$$(1,2) \quad G_{ik} = \chi T_{ik}$$

richiedono allora l'uso della geometria di Riemann, con conseguente struttura matematica assai complicata.

Le equazioni gravitazionali, applicate all'Universo nella sua totalità, portarono alla *cosmologia relativista* (1917), con i vari modelli di Universo di Einstein, De Sitter, Friedmann, etc, tra i quali è però difficile fare una scelta precisa, in base ai dati sperimentali.

Il problema di costruire una «teoria unitaria» della materia e dell'elettricità, suggeriva di ampliare la geometria di Riemann, in modo da geometrizzare anche il campo elettromagnetico (per esempio assimilandolo alla *torsione* dello spazio-tempo). Ma la via da seguire risulta indeterminata, ed atteniamo una serie di teorie più o meno complicate (Weyl, Eddington, Straneo, Kaluza, Klein, Veblen, Einstein, etc), nessuna delle quali risulta pienamente soddisfacente. Infatti nel 1955, pochi giorni prima della sua morte, lo stesso Einstein concludeva amaramente, dopo molti anni di sterili tentativi, che «siamo molto lontani dal possedere una base concettuali della fisica, alla quale poterci in qualche modo affidare», e che occorreva passare ad una teoria di pura natura algebrica [1].

Nel 1952, il FANTAPPIE' (1901-1956), osservava che se noi definiamo come «Universo» un sistema *ordinato*, cioè retto da leggi fisiche valide globalmente, una teoria dei possibili modelli di Universo, deve essere necessariamente basata sulla teoria dei gruppi. Proponeva allora la nuova teoria degli «Universi fisici», con la quale estendeva alla fisica il famoso «Programma di Erlangen» di Klein (che ci dà una classificazione gruppale delle possibili geometrie) [2].

Tale teoria è stata sviluppata da me sin dal 1955, e si arriva allora alla interessante conclusione che i «modelli di Universo» utilizzabili in fisica, sono quelli «ipersferici»  $S_n$ , che ammettono come movimenti in sé il gruppo delle rotazioni  $R_{n+1}$  dello spazio ad  $n + 1$  dimensioni euclideo, e che risulta ad  $n(n + 1)/2$  parametri.

Otteniamo in tal modo una serie di modelli di Universo  $S_3, S_4 \dots S_n$ , ognuno dei quali contiene i precedenti ed è contenuto nei successivi, e nei quali le leggi fisiche sono date dalle equazioni di Maxwell generalizzate. Appare quindi una stretta connessione tra il modello di Universo  $S_n$ , il gruppo  $R_{n+1}$  dei suoi movimenti in sé e le leggi fisiche. Il problema di costruire delle teorie cosmologiche e delle teorie unitarie più perfezionate, viene quindi affrontato passando ai successivi modelli di Universo, con un numero maggiore di dimensioni.

Possiamo allora concludere che se vogliamo sviluppare la fisica secondo lo schema einsteniano (basato sulla geometria differenziale), il problema unitario richiede *la generalizzazione delle equazioni gravitazionali in modo da comprendere quelle elettromagnetiche*. Se invece vogliamo una fisica di tipo maxwelliano (basata sui gruppi), occorre utilizzare la teoria degli Universi di Fantappié, ed allora il problema unitario viene affrontato *generalizzando le equazioni di Maxwell in modo da comprendere quelle della gravitazione*.

In questa memoria ci proponiamo di sviluppare la nuova teoria degli Universi ipersferici. A tale scopo osserviamo che essi possono essere studiati con i metodi della geometria proiettiva classica, ricorrendo alla loro rappresentazione geodetica di Beltrami, sugli spazi proiettivi tangenti [3].

Se poi facciamo tendere all'infinito il raggio  $r$  delle ipersfere  $S_n$ , otteniamo una serie di modelli di Universo euclidei  $E_3, E_4 \dots E_n$ , a 3, 4 ...  $n$  dimensioni, che chiameremo «Universi di Kalitzin» [4], con tre dimensioni spaziali ed  $n - 3$  temporali ( $t_1, t_2 \dots t_{n-3}$ ). Si possono allora introdurre  $n - 3$  «tempi propri»  $\tau_s$  (con  $s = 1, 2 \dots n - 3$ ), e quindi  $n - 3$  velocità tra loro ortogonali e normalizzate. La relatività ristretta viene così estesa al caso  $n$ -dimensionale, con  $n - 3$  costanti universali  $c_s$ , oltre al raggio  $r$  dell'Universo, ed assume un aspetto assai semplice ed elegante.

Mentre il Kalitzin non dà una convincente interpretazione fisica degli  $n - 3$  tempi, in questo lavoro faremo vedere che si può stabilire un interessante legame tra la fisica multitemporale e la relatività generale, nel senso che il passaggio dai movimenti uniformi (inerziali) a quelli qualunque, può essere fatto in modo graduale, mediante uno sviluppo in serie

$$(1,3) \quad x' = x + Vt + (1/2!) At^2 + \dots$$

dove  $V$  è la velocità relativa dei due sistemi di riferimento ed,  $A$  l'accelerazione. Se allora introduciamo oltre al tempo  $t_1 = t$ , gli altri tempi  $t_2 = t^2/2!, \dots t_s = t^s/s!$ , la trasformazione (1,3) diventa lineare, ed i movimenti non uniformi diventano uniformi, rispetto ai vari tempi.

Particolarmente interessante è la relatività con due tempi ( $t, t'$ ), che si ottiene per  $n = 5$ , e cioè la «relatività conforme», con le tre costanti universali ( $r, c, c'$ ). Poiché il gruppo base contiene i movimenti uniformemente accelerati, essa si presta bene allo studio della gravitazione. Ed infatti, le corrispondenti equazioni di Maxwell generalizza-

te, ci danno nel modo più semplice una «teoria unitaria» della materia e dell'elettricità, simile a quella proposta nel 1946 dal Corben [5]. In tale teoria interviene una nuova costante universale  $r_0 = c^2/c'$ , che ha le dimensioni di una lunghezza, ed essa potrebbe essere utile nello studio del campo gravitazionale, del collasso gravitazionale e dei Buchi Neri.

## 2 — GLI UNIVERSI IPERSFERICI ED I GRUPPI DELLE ROTAZIONI

Nella «teoria degli Universi fisici» del Fantappiè, ad ogni gruppo di Lie, con  $k$  parametri, corrisponde un ben definito «Universo», le cui leggi possono essere ricavate per via matematica, a partire dal gruppo base.

Nelle mie successive ricerche ho interpretato la teoria di Fantappiè, come «teoria dei modelli di Universo», ed ho fatto vedere che i modelli suscettibili di una interpretazione fisica, sono quelli «ipersferici», rappresentati dalle superfici sferiche ad  $n$  dimensioni, immerse negli spazi euclidei ad  $n + 1$  dimensioni.

Se  $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n, 0)$  sono le coordinate cartesiane ortogonali, tali ipersfere di raggio  $r$  hanno l'equazione

$$(2,1) \quad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = r^2$$

ed ammettono come gruppo di movimenti in sé le rotazioni dello spazio ad  $n + 1$  dimensioni

$$(2,2) \quad \xi'_A = \alpha_{AB} \xi_B \quad (AB = 0, 1, 2 \dots n)$$

dove  $\alpha_{AB}$  è una matrice ortogonale di determinante  $+1$  (ci limiteremo per semplicità a tale caso). Il gruppo delle rotazioni  $R_{n+1}$  gode della importante proprietà di contenere come sottogruppo quello delle rotazioni  $R_n$  dello spazio ad  $n$  dimensioni. Inoltre il gruppo (2,2) è scomponibile nel prodotto di  $n(n+1)/2$  rotazioni semplici nei piani  $(\xi_A, \xi_B)$ , con parametro  $\theta$ :

$$(2,3) \quad \xi'_A = \xi_A \cos \theta + \xi_B \sin \theta \quad ; \quad \xi'_B = \xi_A \sin \theta - \xi_B \cos \theta.$$

Viene in tal modo semplificato lo studio del gruppo (2,2). A sua volta, ogni rotazione semplice è scomponibile nel prodotto di due «simmetrie» rispetto ad opportuni iperpiani, e tale circostanza porta alla introduzione degli spinori di Cartan [6].

Otteniamo in tal modo una successione di modelli di Universo ipersferici  $S_3, S_4 \dots S_n$  che si possono interpretare come successive approssimazioni del nostro Universo. Da ognuno di tali modelli se ne possono poi ricavare altri in due modi diversi [7], e cioè sopprimendo una o più dimensioni (*modelli ridotti*), ovvero facendo tendere all'infinito una o più costanti universali, che figurano nel gruppo (*modelli limiti*).

E' chiaro che un modello di Universo ipersferico  $S_n$  ( $n \geq 3$ ), implicando delle dimensioni oltre la terza, non ha un diretto significato fisico. Sorge allora il problema di passare dal modello  $n$ -dimensionale alla sua interpretazione fisica in termini di 4 dimensioni spaziali e temporali  $(x, y, z, t)$ .

A tale scopo conviene passare dall'Universo ipersferico, nel quale le geodetiche sono i cerchi massimi, alla sua «rappresentazione geodetica» di Beltrami (vedi fig. 1), e cioè allo spazio tangente  $P_n$   $n$ -dimensionale, nel quale le geodetiche sono rappresentate dalle rette.

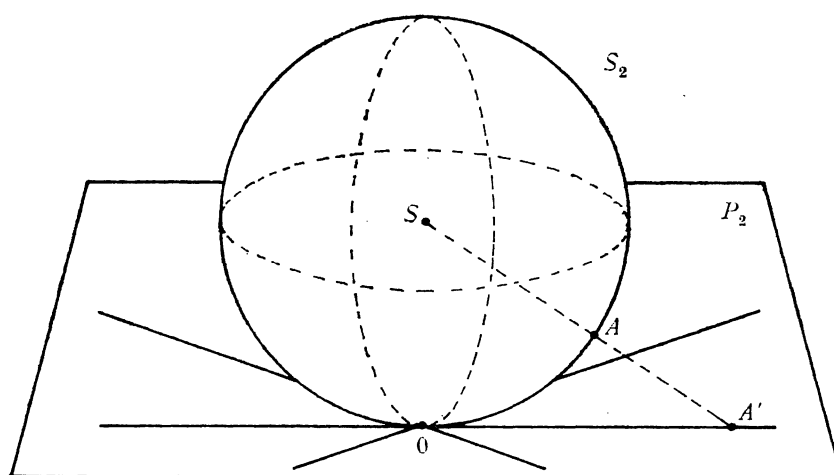


Fig. 1 -- L'Universo sferico bidimensionale  $S$  e la sua rappresentazione geodetica di Beltrami, su di un suo piano tangente.

Se introduciamo le  $n + 1$  coordinate proiettive  $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots \bar{x}_n)$ , legate a quelle cartesiane  $(x_1, x_2 \dots x_n)$  dalle relazioni [8]:

$$(2,4) \quad x_i = r \bar{x}_i / \bar{x}_0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

ed imponiamo la condizione di normalizzazione di Weierstrasse

$$(2,5) \quad \bar{x}_0^2 + \bar{x}_1^2 + \dots + \bar{x}_n^2 = r^2 \text{ cioè } \bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$$

con  $A = 0, 1, 2 \dots n$ , si può dimostrare che la metrica pitagorica

$$(2,6) \quad ds^2 = d\bar{x}_A d\bar{x}_A$$

si riduce alla metrica di Beltrami, valida nello spazio tangente

$$(2,7) \quad A^4 ds^2 = A^2 (dx_i dx_i) - (\alpha_i dx_i)^2$$

dove abbiamo posto

$$(2,8) \quad A^2 = 1 + \alpha_s \alpha_s \text{ con } \alpha_s = x_s/r$$

La dimostrazione é analoga a quella che si fa nella relatività proiettiva.

Alla metrica di Beltrami corrisponde il tensore fondamentale

$$(2,9) \quad A^4 g_{ik} = A^2 \delta_{ik} - x_i x_k / r^2$$

il cui determinante é dato da

$$(2,10) \quad g = A^{-2(n+1)}$$

Con calcoli laboriosi, ma elementari, si deduce che

$$(2,11) \quad g^{ik} = A^2 (\delta_{ik} + x_i x_k / r^2)$$

Il D'alambertiano dell'Universo ipersferico  $S_1$  si calcola con la formula

$$(2,12) \quad \square \varphi = (1/\sqrt{g}) \partial_i (\sqrt{g} g^{ki} \partial_k \varphi) =$$

Avremo quindi (ponendo per semplicità  $r = 1$ ):

$$\begin{aligned} & A^{n+1} \partial_i (A^{-n-1} \cdot A^2 (\delta_{ik} + x_i x_k) \partial_k \varphi) = \\ & = A^{n+1} [(\partial_i A^{1-n}) \partial_i \varphi + \partial_i (A^{1-n}) x_i x_k \partial_k \varphi] = 0 \end{aligned}$$

Se teniamo presente che

$$\partial_i A^{1-n} = (1-n) A^{-1-n} x_i \quad ; \quad \partial_i x_i = n \quad ; \quad x_s x_s = A^2 - 1$$

otteniamo la seguente equazione (per  $r \neq 1$ )

$$(2,13) \quad r^2 \square \varphi = A^2 (r^2 \partial_i \partial_i \varphi + x_i x_k \partial_i \partial_k \varphi + 2 x_k \partial_k \varphi) = 0$$

che generalizza il d'alambertiano.

Il gruppo  $R_{n+1}$  dei movimenti in sé dell'Universo ipersferico  $S_n$ , dato dalle (2,2), induce sullo spazio tangente le proiezioni

$$(2,14) \quad \bar{x}'_A = \alpha_{AB} \bar{x}_B \quad (AB = 0, 1, 2 \dots n)$$

che si scrivono così, in coordinate cartesiane

$$(2,15) \quad x'_i = (\alpha_{ik} x_k + \alpha_{i0}) / (\alpha_{00} + \alpha_{i0} x_i / r)$$

e mutano in sé l'assoluto di Cayley-Klein, di equazione  $A = 0$ .

Infine osserviamo che se ci poniamo nel sistema di riferimento proprio, nel quale  $x_i = 0$ , e quindi  $A = 1$ , si ha

$$(2,16) \quad \bar{x}_A = (r, 0, 0, \dots 0)$$

In altri termini, nell'origine, il vettore posizione ha tutte le componenti nulle, tranne la  $x_0 = r$ .

### 3 — LA RELATIVITÀ MULTITEMPORALE DI KALITZIN

Per dare una interpretazione fisica delle  $n$  variabili  $(x_1, x_2 \dots x_n)$ , date dalle  $\bar{x}_i = x_i/A$ ;  $\bar{x}_0 = r/A$ , è opportuno passare al limite, per  $r$  tendente all'infinito, ed allora le coordinate proiettive  $\bar{x}_A$  si riducono a quelle cartesiane  $x_i$ . Otteniamo allora una serie di modelli di Universo euclideo  $E_3, E_4 \dots E_n$  a 3, 4 ...  $n$  dimensioni.

Il Kalitzin (1918-1970) ha osservato che, poiché lo spazio fisico ha solo tre dimensioni, quelle oltre la terza saranno di tipo temporale [9], ed occorre introdurre gli  $n - 3$  tempi  $(t_1, t_2 \dots t_{n-3})$ . Avremo allora un modello di Universo euclideo  $E_n$ , con la seguente metrica

$$(3,1) \quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c_1^2 dt_1^2 - \dots - c_{n-3}^2 dt_{n-3}^2$$

dove  $(c_1, c_2 \dots c_{n-3})$  sono le velocità della luce rispetto agli  $n - 3$  tempi.

Mentre il Kalitzin introduce solo un tempo proprio, noi ne introdurremo  $n - 3$ , in modo da rendere la teoria più simmetrica. Questo ci permetterà di generalizzare la relatività ristretta al caso  $n$ -dimensionale, in modo assai semplice ed elegante.

A questo scopo introduciamo gli  $n - 3$  tempi propri, così definiti

$$(3,2) \quad -c_s^2 d\tau_s^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c_1^2 dt_1^2 - \dots c_{n-3}^2 dt_{n-3}^2$$

Se allora poniamo

$$(3,3) \quad B_s = \sqrt{1 - \vec{V}_{(s)}^2/c_s^2 + \sum_{k \neq s} (c_k dt_k/c_s dt_s)^2}$$

con  $\vec{V}_{(s)} = dx_\alpha/dt_s$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), e dove la somma é estesa da  $k = 1$ , ad  $n - 3$ , escluso il valore  $s$ , il tempo proprio  $d\tau_s$  si può scrivere così

$$(3,4) \quad d\tau_s = B_s dt_s$$

e si verifica che per  $c_s \rightarrow \infty$ , si ha  $B_s = 1$ , e quindi  $d\tau_s = dt_s$ . Fatta questa premessa, introduciamo le  $n - 3$  velocità

$$(3,5) \quad u_i^{(s)} = \frac{dx_i}{d\tau_s} = \frac{1}{B_s} \cdot \frac{dx_i}{dt_s}$$

Se ci poniamo nel sistema di riferimento proprio, nel quale  $x_i = 0$ , si avrà  $B_s = 1$  (perché  $\vec{V}_{(s)} = 0$ ). Ne segue che il vettore (3,5) avrà tutte le componenti nulle, tranne la

$$(3,6) \quad u_{s+3}^{(s)} = i c_s$$

Se ne deduce che gli  $n - 3$  vettori (3,5) sono normalizzati e tra loro ortogonali, cioè

$$(3,7) \quad \boxed{u_k^{(r)} u_k^{(s)} = -c_s^2 \delta_{rs}}$$

Nell'Universo  $E_n$  di Kalitzin, che generalizza quello di Minkowski, da ogni punto esce un cono-luce che lo divide nelle tre regioni di passato, presente e futuro. Si possono allora definire  $n - 3$  velocità limiti  $C_s$ , che risultano maggiori delle costanti universali  $c_s$ , che appaiono nella metrica (3,1).

Infatti, della  $ds^2 = 0$ , si deduce che

$$(3,8) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = c_1^2 dt_1^2 + c_2^2 dt_2^2 + \dots c_{n-3}^2 dt_{n-3}^2$$

dividendo i due membri per  $dt_s^2$  e ponendo  $C_s^2 = (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n-3}^2)/dt_s^2$  otteniamo le  $n - 3$  velocità limiti



$$(3,9) \quad C_s = c_s \sqrt{1 + \sum_{k \neq s} (c_k \dot{t}_k / c_s \dot{t}_s)^2} \geq c_s$$

Le cose si semplificano notevolmente se ci limitiamo allo studio degli Universi di Kalitzin «ridotti» a due sole dimensioni  $(x, t_s)$ . Otteniamo allora dei modelli di Universo con la metrica

$$(3,10) \quad ds^2 = dx^2 - c_s^2 dt_s^2$$

il cui studio risulta simile a quello del modello di Universo di Minkowski nelle due dimensioni  $(x, t)$ .

#### 4 — LA RELATIVITÀ GENERALE E LA FISICA MULTITEMPORALE

Il Kalitzin, nel suo libro, non dà una convincente interpretazione fisica degli  $n - 3$  tempi, il cui significato rimane alquanto oscuro. In conseguenza, la sua «relatività multitemporale», rimane solo una estensione formale della relatività ristretta, al caso  $n$ -dimensionale. Invece noi faremo vedere che la fisica multitemporale può essere collegata alla relatività generale in modo assai semplice, e questo ci permette di affrontare su nuove basi gruppali il problema unitario e quello della gravitazione.

E' noto che Einstein, per costruire una teoria relativistica della gravitazione, ha fatto vedere che è necessario passare dai riferimenti inerziali a quelli non inerziali. Intervengono allora gli spazi di Riemann a curvatura variabile, i quali non ammettono gruppi di movimenti in sé, e cade così la struttura gruppale della fisica.

La relatività ristretta può essere invece ampliata in modo più graduale, che ne conservi la sua struttura gruppale. A questo scopo osserviamo che il gruppo di Galilei della fisica classica, può essere generalizzato nel seguente modo (nel caso delle due variabili  $x, t$ ):

$$(4,1) \quad x' = x + V_{(1)} t + V_{(2)} t^2/2! + \dots + V_{(n-3)} t^{n-3}/(n-3)! ; t' = t$$

dove  $V_{(1)}$  è la velocità,  $V_{(2)}$  l'accelerazione, e così via (che supporremo costanti), e lo sviluppo in serie è arrestato alla potenza  $n - 3$ .

Tale trasformazione non lineare, può essere linearizzata, se introduciamo le  $n - 3$  scale del tempo, così definite

$$(4,2) \quad \boxed{t_s = t^s/s!}$$

ed allora avremo la trasformazione lineare

$$(4,3) \quad \begin{cases} x' = x + V_{(1)} t_1 + V_{(2)} t_2 + \dots + V_{(n-3)} t_{n-3} \\ t_1' = t_1 \quad ; \quad t_2' = t_2 \quad \dots \quad t_{n-3}' = t_{n-3} \end{cases}$$

alla quale corrisponde la seguente matrice

$$(4,4) \quad G = \begin{bmatrix} 1 & V_{(1)} & V_{(2)} & \dots & V_{(n-3)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

e si dimostra subito che tali trasformazioni formano un gruppo. Esiste infatti la trasformazione identica, di parametri  $V_{(s)} = 0$ , ad ogni trasformazione di parametri  $V_{(s)}$  corrisponde quella inversa di parametri  $-V_{(s)}$ . Infine il prodotto di due trasformazioni di parametri  $V_{(s)}$  e  $V'_{(s)}$  è una trasformazione di parametri  $V_{(s)} + V'_{(s)}$ . Si osservi poi che con le nuove scale del tempo (4,2) i movimenti accelerati di vario ordine, vengono trasformati in una serie di movimenti uniformi, rispetto ai tempi  $t_s$ .

Particolarmente semplice è lo studio dei modelli «ridotti», con le due dimensioni  $(x, t_s)$ . In tale caso, il gruppo base risulta isomorfo a quello di Galilei, ed è dato da

$$(4,5) \quad x' = x + V_{(s)} t_s \quad ; \quad t_s' = t_s$$

È facile trovare il legame tra la velocità  $V_{(s)}$  e la velocità  $V_{(1)} = V$ . Si ha infatti, in base alle (4,2)

$$(4,6) \quad \frac{dx}{dt_s} = \frac{s-1}{t^{s-1}} \frac{dx}{dt} \quad \text{e quindi} \quad V_{(s)} = (s-1) t^{1-s} V$$

L'equazione dinamica del punto libero (riferita al tempo  $t_s$ ), è data da

$$(4,7) \quad d^2 x / dt_s^2 = 0$$

la quale, in base alla (4,6), si scrive in questo modo

$$(4,8) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{s-1}{t} \frac{dx}{dt} = 0$$

che integrata, ci dà l'equazione del moto  $x = V_{(s)} t/s!$ . Questo significa che, nella scala del tempo  $t_s$ , tale movimento avviene in assenza di forze, cioè risulta inerziale.

## 5 — UNIVERSI IPERSFERICI ED EQUAZIONI DI MAXWELL

Le leggi fisiche valide nell'Universo ipersferico  $S_n$ , invarianti per il gruppo delle rotazioni  $R_{n+1}$ , sono le equazioni di Maxwell generalizzate

$$(5,1) \quad \text{Rot } H_{AB} = J_{ABC} \quad ; \quad \text{Div } H_{AB} = I_A \quad (ABC = 0, 12 \dots n)$$

dove il tensore  $H_{AB}$  ha  $n(n+1)/2$  componenti (uguale al numero dei parametri del gruppo).

Valgono poi le condizioni di integrabilità [10]!

$$(5,2) \quad \text{Rot } J_{ABC} = 0 \quad ; \quad \text{Div } I_A = 0$$

Se allora introduciamo i potenziali  $U_A$  e  $V_{ABC}$ , soggetti alle condizioni

$$(5,3) \quad \text{Div } U_A = 0 \quad ; \quad \text{Rot } V_{ABC} = 0$$

le equazioni (5,1) possono essere risolte ponendo

$$(5,4) \quad H_{AB} = \text{Rot } U_A + \text{Div } V_{ABC}$$

e sostituendo nelle (5,1), otteniamo le equazioni nei potenziali

$$(5,5) \quad \square V_{ABC} = J_{ABC} \quad ; \quad \square U_A = I_A$$

Se poi introduciamo la forza ponderomotrice

$$(5,6) \quad 2f_A = J_{ABC} H_{BC} - 2I_B H_{AB}$$

si avrà  $f_A = \text{Div } T_{AB}$ , con il seguente tensore energetico

$$(5,7) \quad T_{AB} = H_{AS} H_{SB} + (1/4) H_{RS} H_{RS} \delta_{AB}$$

In tal modo la teoria di Maxwell viene estesa allo spazio  $n$ -dimensionale, ed assume un aspetto particolarmente elegante e simmetrico.

Per analizzare la struttura del tensore elettromagnetico generalizzato, introduciamo il vettore *posizione*  $\bar{x}_A$ , e le  $n - 3$  *velocità proiettive*  $\bar{u}_A^{(s)}$ , così definite

$$(5,8) \quad \bar{u}_A^{(s)} = d\bar{x}_A/d\tau_s \quad \text{con} \quad \bar{u}_A^{(r)} \bar{u}_A^{(s)} = -c_s^2 \delta_{rs}$$

e si ha poi  $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$ ;  $\bar{x}_A \bar{u}_A^{(s)} = 0$ . Utilizzando tali vettori, e procedendo come nella relatività proiettiva [11], otteniamo tutta una serie di scalari, vettori e tensori. Per semplificare le formule, poniamo  $r = c_s = 1$ , e non metteremo le sbarrette sopra i vettori proiettivi.

Dal tensore  $H_{AB}$ , si ricaviamo allora

(a) Il *vettore idrodinamico*  $c_A$  e gli  $n - 3$  *vettori magnetici*  $h_A^{(s)}$ , così definiti

$$(5,9) \quad c_A = H_{AB} x_B \quad ; \quad h_A^{(s)} = H_{AB} u_B^{(s)}$$

e si verifica che si ha identicamente

$$(5,10) \quad c_A x_A = 0 \quad ; \quad h_A^{(s)} u_A^{(s)} = 0$$

(b) Al fluido descritto dal tensore  $H_{AB}$ , si possono associare gli «indici»

$$(5,11) \quad f^{(s)} = H_{AB} x_A u_B^{(s)} \quad ; \quad f^{(rs)} = H_{AB} u_A^{(r)} u_B^{(s)}$$

che sono in numero di

$$(5,12) \quad (n - 3) + \binom{n - 3}{2} = \binom{n - 2}{2} = (n - 2)(n - 3)/2$$

Per es nella relatività proiettiva ( $n = 4$ ), si ha un solo indice.

(c) Il tensore  $H_{ABC...D}^*$ , duale di  $H_{AB}$ , ha  $n - 1$  indici, e da esso si può costruire il tensore doppio  $K_{AB}$ , così definito

$$(5,13) \quad K_{AB} = H_{ABC...D}^* u_A^{(1)} u_B^{(2)} \dots u_D^{(n-3)} \quad \text{con} \quad K_{AB} u_B^{(s)} = 0$$

Si può allora introdurre il *campo elettrico*, nel seguente modo

$$(5,14) \quad e = K_{AB} x_B \quad \text{con} \quad e_A x_A = e_A u_A^{(s)} = 0$$

In conseguenza, procedendo come nella relatività proiettiva, si possono costruire le varie teorie limiti, ottenibili l'una dall'altra mediante lo scambio  $x_A \rightarrow u_A^{(s)}$ .

## 6 — LA FISICA CLASSICA «CONFORME» ED I DUE TEMPI $(t, t')$

Vediamo adesso in che modo la «teoria degli Universi Multitemporali ipersferici», ci fornisce per  $n = 3, 4, 5 \dots i$  successivi perfezionamenti della fisica, e ci rivela il profondo legame tra la unificazione dei campi fisici ed i successivi ampliamenti del gruppo base.

Per  $n = 3$  otteniamo un modello di Universo ipersferico tridimensionale  $S_3$ , statico (che chiameremo «modello di Fantappié»), simile a quello di Einstein, ma che ne differisce per alcune importanti caratteristiche: infatti, mentre il modello di Einstein si ottiene come soluzione delle equazioni gravitazionali, e quindi la sua curvatura dipende dalla densità di materia, il modello di Fantappié ha una curvatura indipendente dal suo contenuto materiale. Esso ammette un gruppo di movimenti in sé a 6 parametri, e le corrispondenti equazioni di Maxwell sono quelle della elettro-idrostatica, cioè di un plasma in equilibrio.

Il successivo modello di Universo, si ottiene per  $n = 4$ , ed è quello di De Sitter a curvatura costante. Ad esso corrisponde la relatività proiettiva e le equazioni della magnetoidrodinamica.

Se si vuole perfezionare ulteriormente la relatività proiettiva, in modo da costruire una teoria unitaria della materia e dall'elettricità, occorre passare al successivo modello di Universo ipersferico  $S_5$  a cinque dimensioni, da me proposto nel 1958 [7]. Esso è basato sul gruppo delle rotazioni  $R_6$  dello spazio a 6 dimensioni, ed ha 15 parametri, e tre costanti universali  $((r, c, c'))$ .

Per studiare tale modello di Universo, cominciamo con il far tendere all'infinito le tre costanti universali, e ci riduciamo allora ad un modello di Universo euclideo  $E_5$  a cinque dimensioni, tre spaziali  $(x, y, z)$  e le altre due temporali  $(t, t')$ . Se poi ci limitiamo al caso di due dimensioni  $(x, t)$  e di due parametri  $(V, A)$ , il gruppo di Galilei generalizzato è dato da

$$(6,1) \quad X = x + Vt + At^2/2 \quad ; \quad T = t$$

Con la introduzione del «secondo tempo»  $t'$ , così definito

$$(6,2) \quad \boxed{t' = t^2/2}$$

il gruppo (6,1) diventa lineare nelle tre variabili  $(x, t, t')$ , cioè

$$(6,3) \quad X = x + Vt + At' \quad ; \quad T = t \quad ; \quad T' = t'$$

Dato un punto materiale  $P$ , ad esso si possono associare le due velocità, rispetto ai due tempi  $(t, t')$ , dare da

$$(6,4) \quad V = dx/dt \quad ; \quad V' = dx/dt'$$

e per la (7,2) essa sono legate dalla relazione

$$(6,5) \quad \boxed{V' = V/t}$$

In particolare, se il punto  $P$  si muove di moto uniformemente accelerato, con accelerazione  $A$ , si ha  $V = At$ , e quindi  $V' = A$ , cioè la seconda velocità coincide con l'accelerazione costante.

Si può costruire per tale via una meccanica classica invariante per i movimenti uniformemente accelerati. Per esempio, l'equazione del moto di un punto libero, sarà

$$(6,6) \quad d^2x/dt'^2 = 0$$

la quale, in virtù della (6,5) si scrive così

$$(6,7) \quad dV/dt = V/t$$

ed ammette la soluzione  $x = At^2/2$ . Ne segue che nella nuova teoria, il movimento uniformemente accelerato diventa «inerziale», perché avviene in assenza di forze, e quindi essa è adatta allo studio del campo gravitazionale. Infatti, se un punto, sotto l'azione di un campo gravitazionale uniforme, si muove di moto uniformemente accelerato, cambiando la scala del tempo con la (6,2), tale movimento diventa uniforme. Ciò equivale a far sparire il campo gravitazionale. Viceversa, se un corpo si muove di moto uniforme, cambiando scala del tempo, il suo moto diventa uniformemente accelerato, cosa che equivale a fare apparire un campo gravitazionale. Appare in tal modo la connessione tra il secondo tempo  $t'$  ed il campo gravitazionale (oppure tra l'accelerazione ed il campo gravitazionale, come nella esperienza dell'ascensore di Einstein).

7 — LA RELATIVITÀ CONFORME E LA GRAVITAZIONE

Nel caso più generale in cui, pur rimanendo  $r$  infinito, le due costanti universali  $(c, c')$  sono finite, otteniamo il modello di Universo di Kalitzin  $E_5$ , con  $i$  due tempi  $(t, t')$ . Esso generalizza il cronotopo di Minkowski ed ha la seguente metrica

$$(7,1) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 - c'^2 dt'^2$$

In questo caso, il «secondo tempo»  $t'$  è dato dalla formula

$$(7,2) \quad \boxed{t' = (c^2 t^2 - x^2)/(2c^2)}$$

che per  $c$  tendente all'infinito, si riduce alla (6,2). Adoperando questo secondo tempo, il moto uniformemente accelerato relativistico diventa uniforme.

Infatti, nel moto iperbolico relativistico, la velocità è data da

$$(7,3) \quad V = At/\sqrt{1 + (At/c)^2}$$

e per integrazione si ottiene la legge del moto

$$(7,4) \quad x = (c^2/A) [-1 + \sqrt{1 + (At/c)^2}]$$

Essa si può scrivere così

$$(7,5) \quad Ax^2 + 2c^2 x - A c^2 t^2 = 0$$

da cui si deduce che

$$(7,6) \quad x = (A/2c^2) (c^2 t^2 - x^2)$$

ed introducendo il secondo tempo (7,2), essa diventa  $x = At'$ , che è un moto uniforme, con velocità  $V' = A$ .

Il legame tra le due velocità  $(V, V')$  date dalle (6,4) è il seguente

$$(7,7) \quad \boxed{V' = V(t - Vx/c^2)^{-1}}$$

In particolare, se il moto del punto è iperbolico, la sua velocità  $V$  è data dalla (7,3), mentre  $x$  è data dalla (7,4). Sostituendo tali valori

nella (7,7), si ricava, come nel caso classico, che  $V' = A$ , e cioè che la seconda velocità coincide con l'accelerazione (costante).

Se ci riferiamo all'Universo di Kalitzin  $E_5$ , le equazioni di Maxwell generalizzate, ci descrivono il campo elettromagneto-gravitazionale [12], e sono simili alle equazioni di Corben [5].

Per concludere diremo che se non si vuole fare una drastica scelta tra le teorie di tipo Maxwell (basate sui gruppi) e quelle di tipo Einstein (basate sugli spazi di Riemann generalizzati), si può seguire la via indicata dal Cartan. In conseguenza, ad ogni «relatività» basata sul gruppo delle rotazioni dello spazio ad  $n + 1$  dimensioni, si può associare una «relatività generale», che ammette come gruppo di olonomia tale gruppo delle rotazioni [13].

Così per esempio, alla «relatività proiettiva», si può associare una relatività generale proiettiva, ed alla «relatività conforme», si può associare una relatività generale conforme, come abbiamo visto in precedenti lavori [14].



## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. EINSTEIN, *Prefazione al volume «Cinquant'anni di relatività»*, Sansoni, Firenze, 1955.
- [2] L. FANTAPPIE', *Opere Scelte*, vol. II, Ed. Unione Matematica Italiana, Bologna 1973, Libreria Pitagora.
- [3] G. ARCIDIACONO, *Relatività e Cosmologia*, vol. II, Libreria Veschi (Viale Università, 7), 3<sup>o</sup> ed. 1979.
- [4] N. KALITZIN, *Multitemporal theory of relativity*, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1975.
- [5] H.C. CORBEN, *A classical theory of electromagnetism and gravitation*, Phys. Rev. 69, 225 (1946).
- [6] E. CARTAN, *La théorie des spineurs*, Masson, Paris, 1934.
- [7] G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappié*, Coll. Math. X, 85 (1958).
- [8] G. ARCIDIACONO, *Memorie su General Relativity and Gravitation*, 1976-80.
- [9] N. KALITZIN, op. cit. pag. 66.
- [10] I.A. SCHOUTEN, *Tensor analysis for physicists*, Clarendon press, Oxford 1954.
- [11] G. ARCIDIACONO, *Su alcuni casi limiti della magnetoidrodinamica*, Coll. Math. XXII, f. 2 (1971).
- [12] G. ARCIDIACONO, *Tachioni e monopoli magnetici nell'Universo di De Sitter*, Coll. Math. XXVIII, f. 3 (1977). *Tachyons and magnetic monopoles in the De Sitter Universe*, nel volume E. RECAMI, *Tachyons, Magnetic Monopoles and related topics*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [13] G. ARCIDIACONO, *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie*, Coll. Math. XVI, f. 2-3 (1964).
- [14] Relazione tenuta al III Congresso Nazionale di Relatività e fisica della Gravitazione (Accademia delle Scienze di Torino, 21 settembre 1978).

Prof. Giuseppe Arcidiacono  
Via Acquedotto del Peschiera 96  
00135-ROMA

