

# *Lezione 6*

## *Geometrie lineari e toroidali di confinamento magnetico*

G. Bosia  
Universita' di Torino

## Disuniformità con gradiente in direzione del campo ( $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ )

Una topologia di linee magnetiche come quelle mostrate in figura e' caratterizzata da un gradiente del campo  $\nabla B \parallel \mathbf{B}$  che produce una forza risultante nella direzione di  $\mathbf{B}$ . La forza di Lorentz che compare nell' equazione del moto

$$(V-2) \quad m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

A causa del gradiente del campo ha una componente nella direzione del campo:

$$(VI-1) \quad \langle F_{\parallel} \rangle = -|q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}| \sin \alpha = -|q|v_{\perp}B \sin \alpha$$

con :

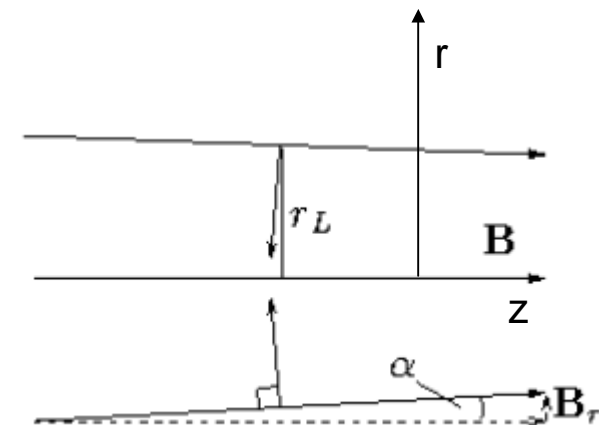
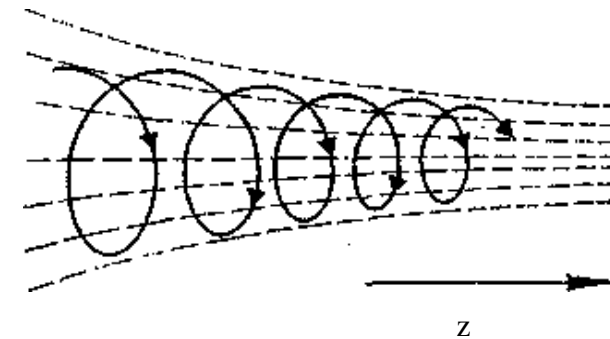
$$(VI-2) \quad \sin \alpha = \frac{-B_r}{B}$$

Dalla :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

si puo' calcolare  $B_r$  in funzione di  $B_z$ . In coordinate cilindriche :

$$(VI-3) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0 .$$



## Gradiente del campo in direzione del campo ( $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ )

ossia:

$$(VI-4) \quad r B_r = - \int r \frac{\partial B_z}{\partial z} dr$$

Se  $r_L$  è abbastanza piccolo che:  $\frac{\partial B_z}{\partial z} \simeq \text{const}$

$$(VI-5) \quad [r B_r]_0^{r_L} \simeq \int_0^{r_L} r dr \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} r_L^2 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Ossia

$$(VI-6) \quad B_r(r_L) = -\frac{1}{2} r_L \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$(VI-7) \quad \sin \alpha = -\frac{B_r}{B} = +\frac{r_L}{2} \frac{1}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Pertanto la forza e' uguale a:

$$(VI-8) \quad \langle F_{\parallel} \rangle = -|q| \frac{v_{\perp} r_L}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

## **Momento magnetico di una carica in moto**

Quando una particella entra nella struttura magnetica in cui il campo magnetico cresce, subisce una forza **ritardante** proporzionale alla componente del gradiente e alla quantità :

$$(VI-9) \quad \mu \equiv \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B$$

Che e' consistente con la definizione di momento magnetico di una spira di raggio  $r_L$  percorsa da una corrente  $I = q \Omega_c / 2\pi$ :

$$(VI-10) \quad \mu = AI = \pi r_L^2 \cdot \frac{|q| v_{\perp}}{2\pi r_L} = \frac{|q| r_L v_{\perp}}{2} \quad \Omega = \frac{|q| B}{m}$$

Scritta vettorialmente, la forza ritardante e' pertanto :

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\Omega}$$

$$(VI-11) \quad F_{\parallel} = \mu \cdot \nabla_{\parallel} B$$

Il momento magnetico e' associato al moto di girazione nel piano perpendicolare al moto e punta in direzione di **B** ma in verso opposto.

## *Momento magnetico*

Un circuito piano a sezione rettangolare di area  $d\mathbf{A} = dx dy$ , percorso da una corrente  $I$ , immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  e' soggetto ad una forza  $\mathbf{F}$  avente componenti:

$$\begin{aligned}
 F_x &= Idy[B_z(x+dx) - B_z(x)] = Idydx \frac{\partial B_z}{\partial x} \\
 F_y &= -Idx[B_z(y+dy) - B_z(y)] = Idydx \frac{\partial B_z}{\partial y} \\
 F_z &= -Idx[B_y(y+dy) - B_y(y)] - Idy[B_x(x+dx) - B_x(x)] \\
 &= -Idx dy \left[ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right] = Idydx \frac{\partial B_z}{\partial z}
 \end{aligned}
 \tag{VI-12}$$

ovvero:

$$\mathbf{F} = Idydx \nabla B_z
 \tag{VI-13}$$

e, se  $\mu = I d\mathbf{A} = Idydx \hat{\mathbf{z}}$  e' il momento magnetico vettoriale del circuito

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{B} \cdot \mu) = (\nabla \mathbf{B}) \cdot \mu
 \tag{VI-14}$$

## *Momento magnetico*

La forma del circuito non importa perché un circuito di forma qualunque può sempre essere scomposto in un gran numero di spire rettangolari adiacenti. Dunque le definizioni di  $\mu$  :

$$\mu = IdA$$

(VI-15)

e della forza applicata  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B$$

(VI-16)

che può anche essere scritta con  $F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B$

(VI-17)

e' valida per un circuito avente una forma qualsiasi. Il fatto che  $\mu$  sia sempre diretto in direzione opposta al campo, indica che il campo magnetico prodotto dal moto delle particelle del plasma si oppone sempre al campo magnetico esterno (diamagnetismo del plasma). La deriva di  $\nabla B$  può essere scritta, introducendo il momento magnetico come:

$$v_{\nabla B} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\mu}{q} \frac{\mathbf{B} \wedge \nabla B}{B^2}$$

(VI-18)

## *Invarianza del momemto magnetico*

Il momento magnetico di una particella in moto in un campo magnetico e' un invariante del moto: Infatti da :

$$(VI-19) \quad F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B$$
$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = F_{\parallel} = -\mu \frac{dB}{dz} \quad \Rightarrow \quad mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = -\mu v_z \frac{dB}{dz} = -\mu \frac{dB}{dt}$$

ossia :

$$(VI-20) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) + \mu \frac{dB}{dt} = 0$$

Per la conservazione dell' energia cinetica:

$$(VI-21) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = 0$$
$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B \right) = 0$$
$$\frac{d}{dt} (\mu B) - \mu \frac{dB}{dt} = 0$$
$$= \frac{d\mu}{dt} = 0$$

ossia

$$(VI-22) \quad \boxed{\mu = \text{cost}}$$

## *Conservazione del momento angolare*

Il momento angolare della particella rispetto al centro di guida e' per definizione

$$(VI-23) \quad L = r_L m v_{\perp} = \frac{m v_{\perp}}{|q| B} m v_{\perp} = \frac{2m}{|q|} \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \frac{2m}{|q|} \mu$$

Pertanto la conservazione del momento magnetico riflette la conservazione del momento angolare della particella rispetto al centro di guida.

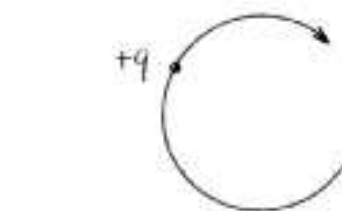


## *Diamagnetismo del plasma*

Osserviamo che la direzione di  $\mu_m$  non dipende dal segno della carica; infatti, se si cambia segno a  $q$ , si inverte la direzione di  $\mathbf{v}$ .

Il campo magnetico generato da una corrente anulare a distanza molto più grande di  $R$ , è simile a quello di un dipolo magnetico con lo stesso momento. Nella figura si fa vedere che il campo magnetico creato dalle particelle sia positive che negative, che si muovono in un campo magnetico uniforme, si oppone al campo magnetico esterno all'interno delle orbite, il che equivale ad un dipolo diamagnetico.

diamagnetiche dei plasmi.

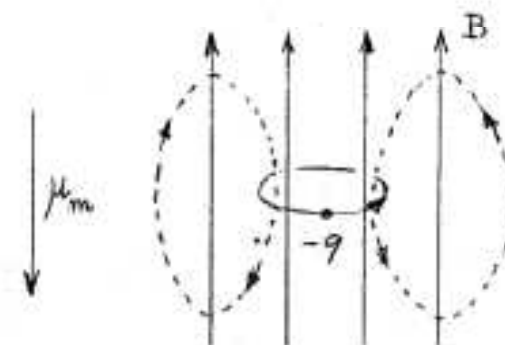
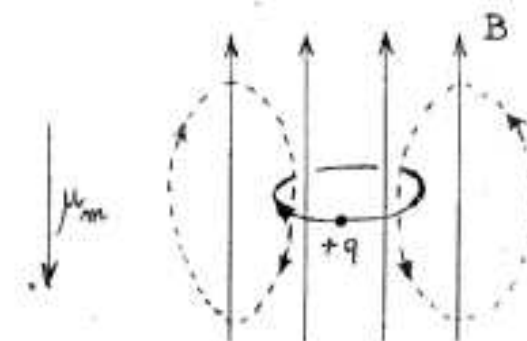


$\vec{B}$  diretto verso il lettore



Fig. II-2

II-3 MOTI DI DERIVA



Questa è l'origine delle proprietà **diamagnetiche** dei plasmi

## *Invarianti adiabatici*

E' noto in meccanica classica che un se un corpo e' in moto periodico, l' integrale di azione,

$$A = \oint pdq$$

dove p e q sono i momenti e le coordinate generalizzate, che variano periodicamente, **e' invariante nel moto.**

Queste quantità rimangono invarianti (**invarianti adiabatici**) anche se il moto del sistema non e' esattamente periodico perché i parametri del sistema subiscono modificazioni lente rispetto al periodo di rotazione.

Gli invarianti adiabatici permettono spesso di risolvere in un modo semplice complicati problemi di dinamica. I moti di particelle cariche in campi magnetici sono sempre periodici e pertanto esistono tre invarianti adiabatici associati al loro moto.

I Se assumiamo che  $p = mvr$  e' il momento angolare e  $\theta$  l' angolo di rotazione nel piano perpendicolare al campo magnetico

$$\oint pdq = \oint mv_{\perp} d\theta = 2\pi r_L mv_{\perp} = 2\pi \frac{mv_{\perp}^2}{\Omega_c} = 4\pi \frac{m}{|q|} \mu$$

## *Invarianti adiabatici*

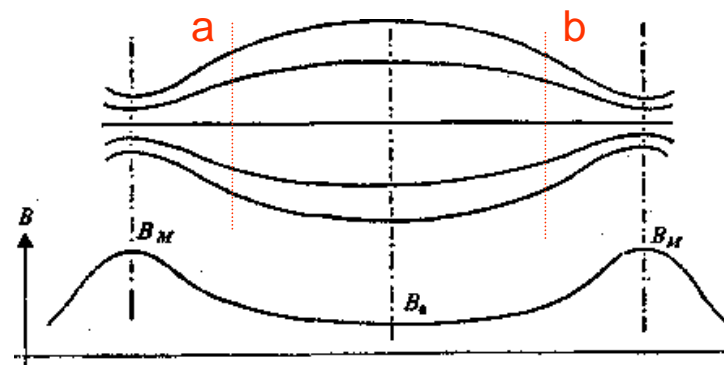
Il momento magnetico e' il **primo invariante adiabatico** del moto (se  $q/m$  non varia).

### **Invariante adiabatico longitudinale**

Nel moto di particelle in un sistema a specchio e' possibile individuare un **secondo invariante** adiabatico

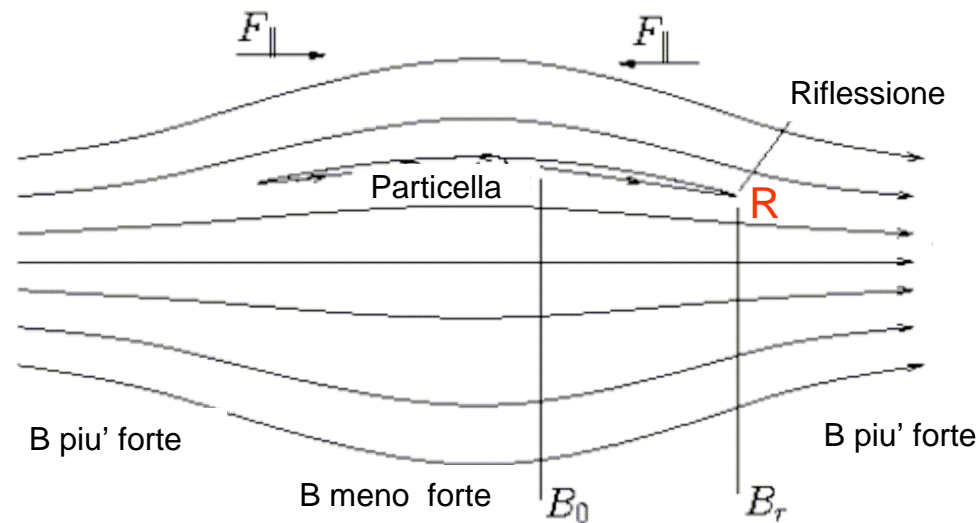
$$J = \int_a^b v_{//} ds$$

Dove  $ds$  e' l'elemento d'arco percorso dal centro di guida,  $a$  e  $b$  i due punti di specchio



## Specchio magnetico

Una applicazione immediata della costanza del momento magnetico e' il sistema di confinamento a **Specchio Magnetico**. Una carica che si muova in direzione assiale e'



soggetta ad entrambe le estremità a una forza  $F_{||} = -\mu \nabla_{||} B$  che tende a rallentare il suo moto e se il campo magnetico e' sufficientemente alto, ad invertire la direzione del moto.

In questo caso le particelle sono **confinare** anche assialmente all'interno della trappola magnetica che viene chiamata **specchio** (magnetic mirror).

## *Specchio magnetico*

Si consideri una particella con carica  $q$  che si muove in direzione parallela all'asse della struttura magnetica e sia :

$$(VI-24) \quad K = \frac{1}{2}m(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2) \quad \text{la sua energia cinetica nel punto R.}$$

Nel punto R ci sarà una riflessione del moto se la velocità parallela si annulla, ossia se:

$$(VI-25) \quad \frac{1}{2}m(v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2) = \frac{1}{2}mv_{\perp r}^2$$

La conservazione del momento magnetico calcolata nello stesso punto impone:

$$(VI-26) \quad \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp 0}^2}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\perp r}^2}{B_r}$$

E combinando le due

$$v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2 = \frac{B_r}{B_0}v_{\perp 0}^2$$

Ossia la condizione per ottenere una riflessione della particella nel punto R è'

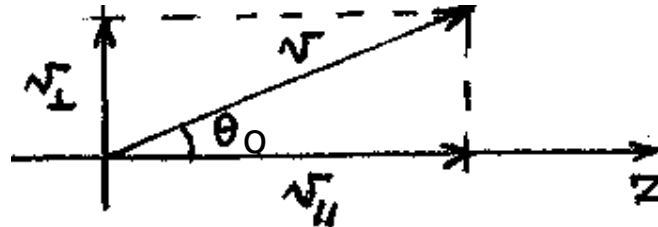
(VI-27)

$$\frac{B_0}{B_r} = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2}$$

**Condizione di specchio**

## Specchio magnetico

Se nello spazio delle velocità si definisce un angolo di inclinazione (pitch angle) del



vettore velocità rispetto alla direzione del campo magnetico e' evidentemente :

$$(VI-28) \quad \sin^2 \theta_0 = \frac{v_{\perp 0}^2}{v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2} = \frac{B_0}{B_r}$$

e se  $\theta_0$  e' troppo piccolo non ci sarà riflessione ma la particella sfuggerà in direzione assiale dalla zona di confinamento.

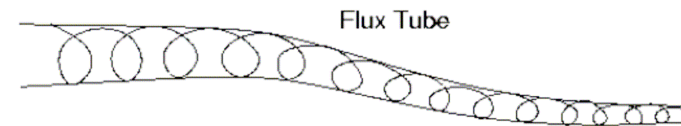
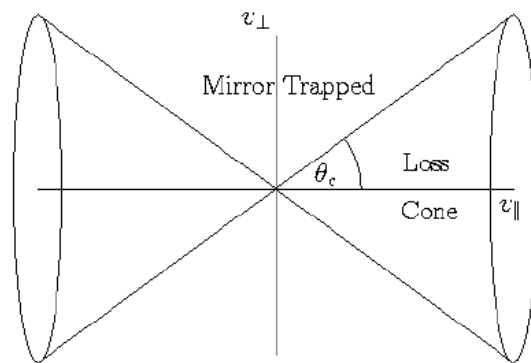
L' angolo limite magnetico, (simile all' angolo limite ottico) e' evidentemente:

$$(VI-29) \quad \theta_c = \sin^{-1} (B_0/B_1)^{\frac{1}{2}}$$

E si potrà identificare un **cono di perdita** sotteso dall' angolo limite

## Specchio magnetico

Il cono di perdita divide lo spazio delle velocità in due parti: al suo esterno le particelle sono confinate; al suo interno sono perse. Essenzialmente sono confinate le particelle ad



alta velocità perpendicolare.

Il flusso magnetico incluso in un' orbita di girazione e' dato da:

$$(VI-30) \quad \Phi = \pi r_L^2 B = \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B^2} B = \frac{2\pi m}{q^2} \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{const}$$

ed e' pertanto **costante**

## *Specchi magnetici*

Il rapporto  $R_m = B_1/B_0$  viene spesso indicato come “mirror ratio”

Più grande è il rapporto di specchio R, più stretto risulta essere il cono di perdita e quindi minore è la frazione percentuale di particelle che sfuggono al confinamento assiale.

Tuttavia, dato un valore di R per quanto grande, le particelle non saranno mai tutte riflesse: Quelle con velocità parallela al campo ( $v_{//} \gg v_{\perp}$ ) con il vettore velocità sia interno al cono di perdita, sfuggiranno al confinamento.

La perdita di confinamento è aumentata dagli effetti delle collisioni, che tendono a ripristinare una distribuzione di velocità isotropa. Pertanto anche le particelle inizialmente confinate vengono prima o poi immesse nel cono di perdita e sfuggono lungo il campo.

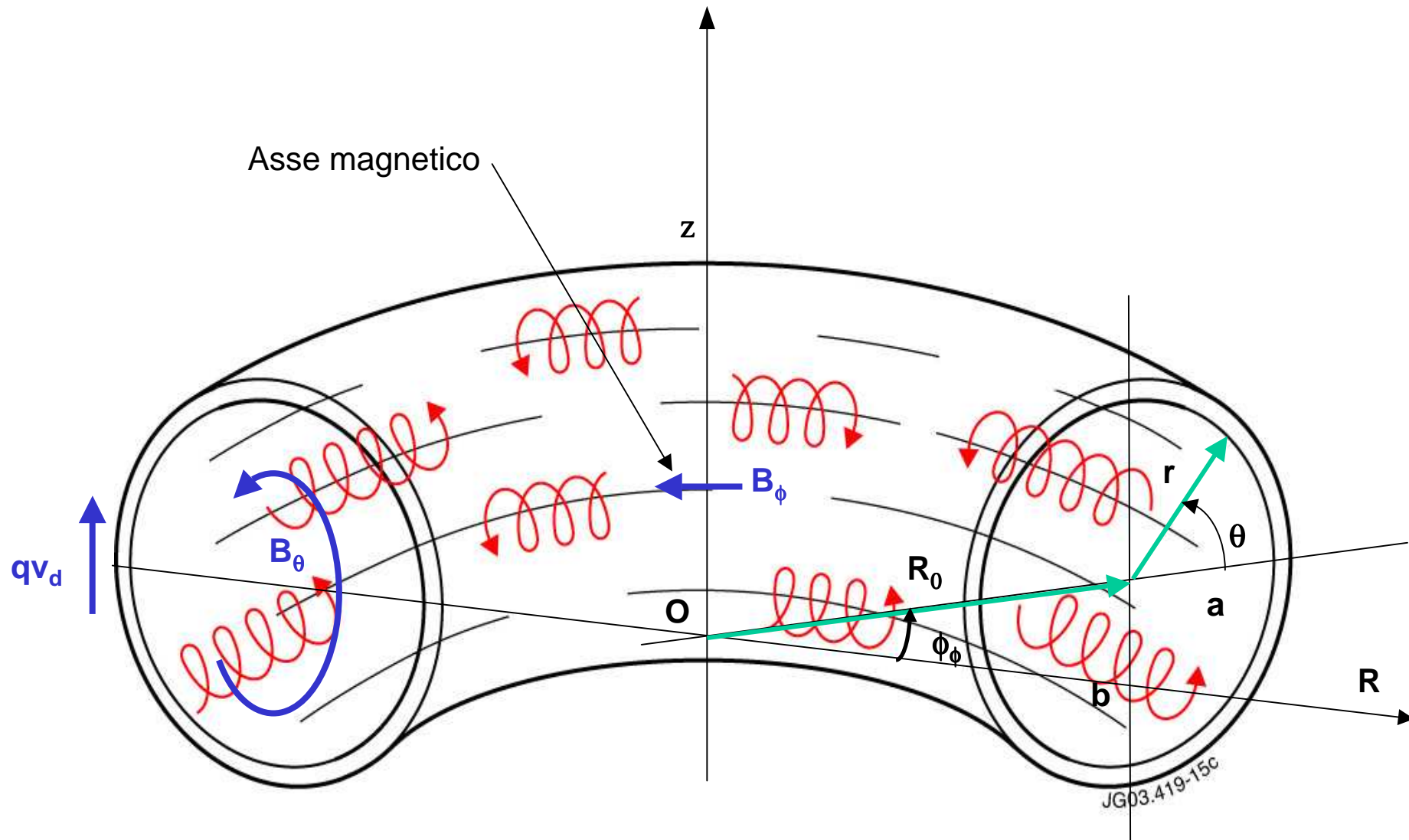
Nell'ambito della ricerca sulla fusione termonucleare controllata, le macchine con questo tipo di confinamento, o 'macchine a specchio', si sono sviluppate per prime perché la struttura magnetica di confinamento è relativamente semplice.

Studi sulla possibilità di impiegare questo metodo di confinamento in un reattore a fusione, mediante una continua iniezione nella macchina di ioni ad alta energia perpendicolare hanno mostrato che un impianto termonucleare di questo tipo, per poter funzionare, dovrebbe convertire direttamente in energia nucleare in energia elettrica con un rendimento del 70\*80% per essere di utilità pratica

La linea dei “mirrors” è stata in pratica abbandonata negli anni 70 a favore della linea “tokamak”..

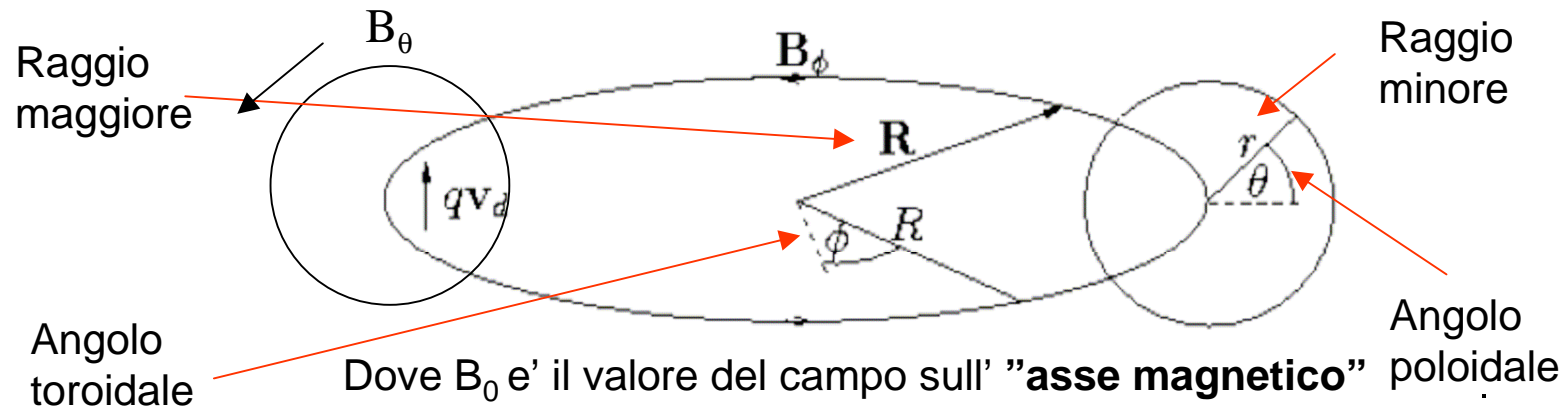


## *Derive in geometria toroidale*



## Geometria toroidale

I più moderni sistemi di confinamento magnetico hanno una geometria toroidale, la cui geometria è definita in figura.



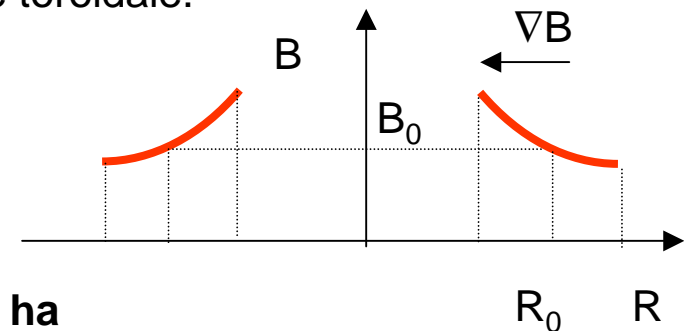
Il campo magnetico principale del toro  $B_\phi$  è in direzione toroidale.

Dall'elettrodinamica elementare :

$$(VI-31) \quad B_\phi = B_0 (R_0/R)$$

Dove  $B_0$  è il valore del campo sull' "asse magnetico".

**Il campo magnetico principale in geometria toroidale ha pertanto un gradiente e le sue linee di forza sono curve**



## *Derive in un sistema toroidale*

In un a geometria toroidale sono pertanto presenti

- Una deriva  $\nabla B$  e di curvatura in direzione verticale con versi opposti per cariche di segno opposto

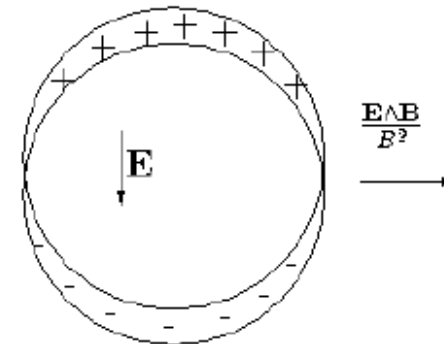
$$(VI-50) \quad \mathbf{v}_d = \frac{1}{q} \left( mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{B}}{R^2 B^2}$$

$$(VI-51) \quad |\mathbf{v}_d| = \frac{1}{q} \left( mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \right) \frac{1}{BR}$$

Gli ioni vanno verso l' alto, gli elettroni verso il basso.

- Il moto in direzione opposta di elettroni e ioni produce una separazione di carica ed un campo elettrico in direzione verticale. Questo a sua volta causa una deriva  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$  globale del plasma in direzione radiale

Pertanto in una topologia magnetica toroidale le particelle tendono a sfuggire in direzione ortogonale al confinamento magnetico. **La perdita di confinamento e' proporzionale alla energia delle particelle del plasma e inversamente proporzionale al modulo del campo magnetico e al raggio maggiore del toro.**



## *Stabilizzazione delle derive in geometria toroidale*

Si consideri un fascio di elettroni con  $v_{\parallel} \neq 0$   $v_{\perp} = 0$

Essi derivano con velocità dipendente dal raggio maggiore  $R$  e dal modulo del campo magnetico  $B_T$  come:

$$(VI-32) \quad v_d = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{1}{B_T R}$$

Se si cerca di compensare la deriva con un campo magnetico con una componente  $B_z$ , questo provocherà una velocità verticale:

$$(VI-33) \quad v = v_{\parallel} \frac{B_z}{B_T} \quad B_z \ll B_T$$

Quello che si vuole è'

$$(VI-34) \quad v_z = 0 = v_{\parallel} \frac{B_z}{B_T} + \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{q}{B_T R}$$

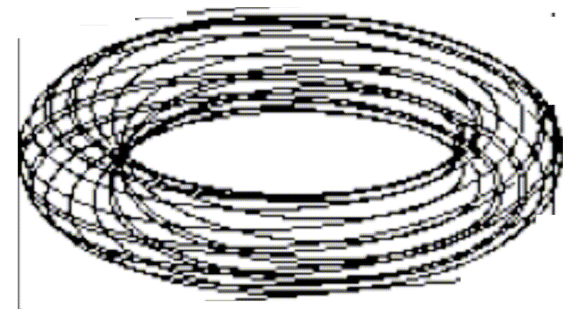
## Stabilizzazione delle derive in geometria toroidale

Pertanto l'intensità del campo deve essere :

$$(VI-35) \quad B_z = -mv_{\parallel} / Rq$$

Si noti che il raggio di Larmor relativo al campo verticale e':

$$(VI-36) \quad r_L(B_z) = \frac{|mv_{\parallel}|}{|qB_z|} = R \quad .$$

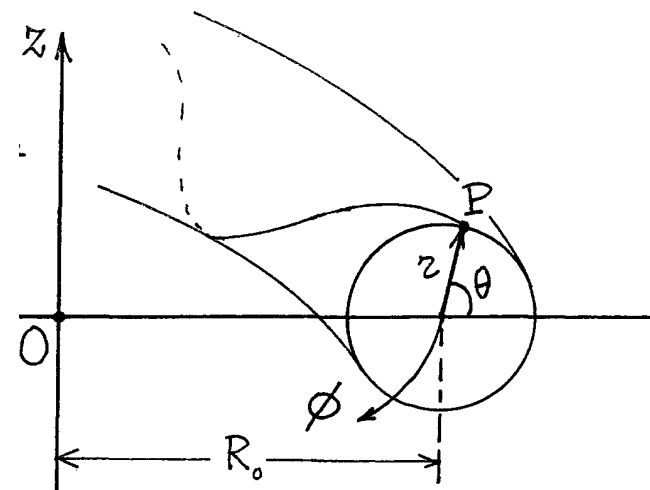


Tuttavia  $B_z$  dipende da  $v_{\parallel}$  e  $q$  e pertanto non può compensare le derive di tutte le componenti del plasma.

Si consideri invece un campo poloidale  $\mathbf{B}_{\theta}$  sovrapposto al campo toroidale  $\mathbf{B}_{\phi}$ . Il campo totale sarà un campo elicoidale avvolto sulle superfici toroidali.

In una sezione poloidale le linee di campo descrivono un cerchio avanzando in direzione toroidale.

L'equazione del moto di una particella che segua esattamente le linee di campo e'



## *Stabilizzazione delle derive in geometria toroidale*

$$(VI-37) \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{B_\theta}{B_\phi} v_\phi = \frac{B_\theta}{B_\phi} \frac{B_\phi}{B} v_\parallel = \frac{B_\theta}{B} v_\parallel$$

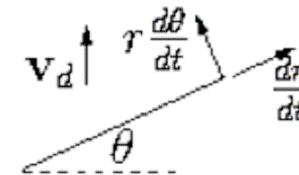
e

$$r = \text{cost}$$

Se ora si addiziona a questo moto quello di deriva in direzione z si ottiene:

$$(VI-38) \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{B_\theta}{B} v_\parallel + v_d \cos \theta$$

$$(VI-39) \quad \frac{dr}{dt} = v_d \sin \theta$$



Dividendo membro a membro le due equazioni:

$$(VI-40) \quad \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{u_d \sin \theta}{\frac{B_\theta}{B} v_\parallel + v_d \cos \theta}$$

## *Stabilizzazione delle derive in geometria toroidale*

e assumendo  $B_\theta, B, v_\parallel, v_d$  costanti si può ricavare l'equazione dell'orbita :

(VI-41)

$$[\ln r] = [-\ln |\frac{B_\theta v_\parallel}{B} + v_d \cos \theta|]$$

Che per  $r=r_0$  e  $\theta=\pi/2$  diventa

(VI-42)

$$r = r_0 / \left[ 1 + \frac{B v_d}{B_\theta v_\parallel} \cos \theta \right]$$

Per  $\frac{B v_d}{B_\theta v_\parallel} \ll 1$  e' con buona approssimazione :

(VI-43)

$$r = r_0 - \Delta \cos \theta$$

con

(VI-44)

$$\Delta = \frac{B v_d}{B_\theta v_\parallel} r_0 \quad \text{Shafranov shift}$$

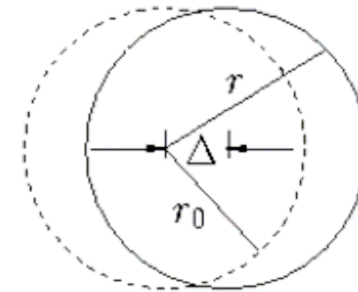
Che e' l'equazione di un'orbita approssimativamente circolare, spostata di una quantità  $\Delta$  rispetto all'asse magnetico.

## *Trasformata rotazionale*

Sostituendo  $v_d$

$$(VI-45) \quad \Delta \simeq r_0 \frac{B}{B_\theta} \frac{1}{q} \frac{(mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2)}{v_{\parallel}} \frac{1}{B_\phi R}$$

$$\simeq \frac{1}{qB_\theta} \frac{mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{v_{\parallel}} \frac{r_p}{R}$$



e, se  $v_{\perp} = 0$

$$\Delta = \frac{mv_{\parallel}}{qB_\theta} \frac{\ddot{r}_0}{R} = r_{L\theta} \frac{r_0}{R}$$

dove  $r_{L\theta}$  e' il raggio di Larmor in un campo magnetico  $B_\theta \times r/R$ . Se  $\Delta$  e' piccolo, tutte le particelle saranno confinate dal campo elicoidale.

La quantità

$$(VI-46) \quad \iota \equiv \frac{\text{Angolo poloidale}}{\text{Angolo toroidale}}$$

Viene chiamata **trasformata rotazionale**. La quantità

$$(VI-47) \quad q'_s = \frac{1}{\iota} = \frac{\text{Angolo toroidale}}{\text{Angolo poloidale}},$$

viene chiamata "fattore di sicurezza (tokamak)":



## *Fattore di sicurezza.*

In approssimazione cilindrica:

$$(VI-48) \quad q_s = \frac{r B_\phi}{R B_\theta}$$

Scritto in funzione del fattore di sicurezza lo spostamento di Shafranov si può scrivere :

$$(VI-49) \quad |\Delta| = r_{L\theta} \frac{r}{R} = r_{L\phi} \frac{B_\phi r}{B_\theta R} = r_{L\phi} q_s$$

Assumendo che  $B_\phi \gg B_\theta$